5. Geometrická posloupnost

DEF.

GEOMETRICKOU POSLOUPNOSTÍ nazýváme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ právě tehdy, když existuje reálné číslo q $(q \in R)$ takové, že pro každé přiroz. číslo n $(n \in N)$ platí: $a_{n+1} = a_n \cdot q$ DEFINIČNÍ VZOREC

Číslo q nazýváme KVOCIENT.

př. $(2^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ GP $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ ($a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$)

$\Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = 2$

OBECNĚ: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = \frac{2 \cdot 2^{n-1}}{2^{n-1}} = 2$

VLASTNOSTI

1. je-li $a_1 \neq 0 \land q \neq 0$: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

2. je-li $a_1 = 0 \Rightarrow \forall n \in N$: $a_n = 0$

př. GP $\left.\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ q = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $a_2 = a_1 q = 0 \cdot 2 = 0$, $a_3 = a_2 q = 0 \cdot 2 = 0$, $a_4 = a_3 q = 0 \cdot 2 = 0$, $\vdots$

3. je-li $q = 0 \Rightarrow \forall n \in N - \{1\}$: $a_n = 0$

př. GP $\left.\begin{array}{l} a_1 = 5 \\ q = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $a_2 = a_1 q = 5 \cdot 0 = 0$, $a_3 = a_2 q = 0 \cdot 0 = 0$, $a_4 = a_3 q = 0 \cdot 0 = 0$, $\vdots$

VĚTY

V geometrické posloupnosti platí:

1. $\forall n \in N$: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ VZOREC PRO N-TÝ ČLEN — př. $a_5 = a_1 q^{5-1} = a_1 q^4$

2. $\forall k, s \in N$: $a_k = a_s q^{k-s}$ VZOREC PRO LIBOV. 2 ČLENY — př. $a_7 = a_3 q^{7-3} = a_3 q^4$

3. $\forall n \in N - \{1\}$: $|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$ VZOREC PRO PROSTŘEDNÍ ČLEN — př. $|a_4| = \sqrt{a_3 \cdot a_5}$ absolut. hodnota kvůli případ. zn. $\ominus$

4. $\forall n \in N$, kde

a) $q \neq 1 \Rightarrow s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

b) $q = 1 \Rightarrow s_n = n a_1$

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

VZORCE PRO SOUČET PRVNÍCH n ČLENŮ GEOM. POSLOUPNOSTI

DŮKAZY Š+DŮ

1. MATEM. INDUKCÍ

1. $n = 1$ $a_1 = a_1 q^{1-1} = a_1 q^0 = a_1 \cdot 1 = a_1$ $V(1)$ pl.
2. pro $\forall n = k$ dok., že jestliže pl. $V(k) \Rightarrow$ pl. $V(k+1)$, tj. předp., že pro $n = k$ platí $a_k = a_1 q^{k-1}$ a dokaz., že pl. pro $n = k+1$, tj. $a_{k+1} = a_1 q^k$

$L = a_{k+1} = \underbrace{a_k \cdot q}_{\text{z defin. vz.}} = a_1 q^{k-1} \cdot q = a_1 q^k = P$ cbd.

2. $a_k = a_1 q^{k-1}$

$a_s = a_1 q^{s-1}$

$\frac{a_k}{a_s} = \frac{a_1 q^{k-1}}{a_1 q^{s-1}} = q^{k-1-(s-1)}$

$\frac{a_k}{a_s} = q^{k-s} \Rightarrow a_k = a_s q^{k-s}$ cbd.

4. a) $q \neq 1$ MAT. IND.

1. $n = 1$ $s_1 = a_1 \frac{q^1 - 1}{q - 1} = a_1$ $s_1 = a_1$ $V(1)$ pl.
2. $\forall n = k$: $V(k)$ pl., tj. $s_k = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1}$, pak pl. $V(k+1)$, tj. $s_{k+1} = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$

$L = s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + a_1 q^k = a_1 \frac{q^k - 1 + q^k (q - 1)}{q - 1} =$

$= a_1 \frac{q^k - 1 + q^{k+1} - q^k}{q - 1} = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} = P$ cbd.

b) $q = 1$

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 q = a_1 \cdot 1 = a_1$

$a_3 = a_2 q = a_1 \cdot 1 = a_1$

$\vdots$

$a_n = a_1$

$s_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{n a_1}$

$s_n = n a_1$ cbd.

Příklady

① Geometrická posloupnost

a) $a_1 = 2,\ q = 5,\ a_{21} = ?$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_{21} = a_1 q^{20} = 2 \cdot 5^{20}$$

b) $a_6 = 32,\ a_3 = 4,\ a_1 = ?,\ q = ?,\ a_7 = ?$

1. zp.

$$a_6 = a_1 q^5$$
$$a_3 = a_1 q^2$$

$$32 = a_1 q^5$$
$$4 = a_1 q^2 \quad \Big\} :$$

$$8 = q^3 \qquad a_1 = \frac{4}{q^2}$$

$$q = 2 \qquad a_1 = \frac{4}{4} = 1$$

$$a_7 = a_1 q^6 = 1 \cdot 2^6 = 64$$

2. zp.

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$
$$a_6 = a_3 q^{6-3}$$
$$32 = 4q^3 \quad | :4$$
$$q^3 = 8$$
$$q = 2$$
$$a_3 = a_1 q^2$$
$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{4}{2^2} = 1$$

c) $a_1 = 4,\ a_2 = \frac{4}{3},\ q = ?,\ s_5 = ?$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$q \neq 1 \Rightarrow s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_5 = 4 \cdot \frac{(\frac{1}{3})^5 - 1}{\frac{1}{3} - 1}$$

$$s_5 = 4 \cdot \frac{\frac{1}{243} - 1}{-\frac{2}{3}} = 4 \cdot \frac{-\frac{242}{243}}{-\frac{2}{3}} = 4 \cdot \frac{242 \cdot 3}{243 \cdot 2} = \frac{484}{81} = 5\frac{79}{81}$$

d) $d_1 = 5,\ q = 1;\ d_2, d_3, d_4 = ?$

$$d_2 = d_1 q = 5 \cdot 1 = 5$$
$$d_3 = d_2 q = 5 \cdot 1 = 5$$
$$d_4 = d_3 q = 5 \cdot 1 = 5$$
$$\vdots$$
$$d_n = 5$$

[jde současně o AP
$d_1 = 5$ diference $d = 0$]

NEBO

$$d_2 = d_1 q = 5 \cdot 1 = 5$$
$$d_3 = d_1 q^2 = 5 \cdot 1^2 = 5$$
$$d_4 = d_1 q^3 = 5 \cdot 1^3 = 5$$
$$\vdots$$
$$d_n = d_1 q^{n-1} = 5 \cdot 1^{n-1} = 5$$

e) $e_1 = 3,\ q = 0$
$e_2, e_3, e_4 = ?$

$$e_2 = e_1 q = 3 \cdot 0 = 0$$
$$e_3 = e_2 q = 0 \cdot 0 = 0$$
$$e_4 = e_3 q = 0 \cdot 0 = 0$$
$$\vdots$$
$$e_n = e_1 q^{n-1} = 3 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 0^{n-1} = 0$$

f) $f_1 = 0,\ q = 5 \quad f_2, f_3, f_4 = ?$

$$f_2 = f_1 q = 0 \cdot 5 = 0$$
$$f_3 = f_2 q = 0 \cdot 5 = 0$$
$$f_4 = f_3 q = 0 \cdot 5 = 0$$

$$f_n = f_1 q^{n-1}$$
$$f_n = 0 \cdot 5^{n-1} = 0$$

[TYP e) f) jsou GP, kde $a_1 = 0 \vee q = 0$
$\Rightarrow$ dále se jimi nebudeme výrazně zabývat]

② Dokažte, že čísla $\sqrt{5} - \sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ jsou prvními třemi členy GP

$$q_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3}$$

$$q_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3}$$

$q_1 = q_2$ kvocienty se rovnají $\Rightarrow$ jde o první 3 členy GP

③ Dokažte, že posloupnosti jsou geometrické, určete q a prvních 5 členů

a) $\left(\frac{2}{(-2)^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\quad GP \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n q \Rightarrow \exists q \in R: q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2}{(-2)^{n+1}}}{\frac{2}{(-2)^n}} = \frac{2\cdot(-2)^n}{(-2)^{n+1}\cdot 2} = \frac{(-2)^n}{(-2)^{n+1}} = \frac{(-2)^n}{(-2)^n\cdot(-2)^1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \quad q \in R \text{ tj.} \Rightarrow GP$$

$a_n = \frac{2}{(-2)^n}$

	DÚ nebo $a_{n+1} = a_n q$	DÚ nebo $a_n = a_1 q^{n-1}$
$a_1 = \frac{2}{(-2)^1} = \frac{2}{-2} = -1$		
$a_2 = \frac{2}{(-2)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$a_2 = a_1 q = (-1)\cdot(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$	$a_2 = (-1)(-\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2}$
$a_3 = \frac{2}{(-2)^3} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$	$a_3 = a_2 q = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$	$a_3 = (-1)(-\frac{1}{2})^2 = -1\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$
$a_4 = \frac{2}{(-2)^4} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	$a_4 = a_3 q = (-\frac{1}{4})\cdot(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$	$a_4 = (-1)(-\frac{1}{2})^3 = -1\cdot(-\frac{1}{8}) = \frac{1}{8}$
$a_5 = \frac{2}{(-2)^5} = \frac{2}{-32} = -\frac{1}{16}$	$a_5 = a_4 q = \frac{1}{8}\cdot(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{16}$	$a_5 = (-1)(-\frac{1}{2})^4 = -1\cdot\frac{1}{16} = -\frac{1}{16}$

b) $(2^n\cdot 3^{2-n})_{n=1}^{\infty}$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}\cdot 3^{2-(n+1)}}{2^n\cdot 3^{2-n}} = \frac{\cancel{2^n}\cdot 2\cdot \cancel{3^1}\cdot \cancel{3^{-n}}}{\cancel{2^n}\cdot 3^{\cancel{2}}\cdot \cancel{3^{-n}}} = \frac{2}{3} \quad q \in R \Rightarrow GP \text{ tj.}$$

$a_{n+1} = a_n q$	NEBO DÚ $a_n = a_1 q^{n-1}$	NEBO DÚ $a_n = 2^n\cdot 3^{2-n}$
$a_1 = 2^1\cdot 3^{2-1} = 2\cdot 3 = 6$		
$a_2 = a_1 q = 6\cdot\frac{2}{3} = 4$	$a_2 = a_1 q^1 = 6\cdot\frac{2}{3} = 4$	$a_2 = 2^2\cdot 3^{2-2} = 4\cdot 3^0 = 4$
$a_3 = a_2 q = 4\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$	$a_3 = a_1 q^2 = 6(\frac{2}{3})^2 = 6\cdot\frac{4}{9} = \frac{8}{3}$	$a_3 = 2^3\cdot 3^{2-3} = 8\cdot 3^{-1} = \frac{8}{3}$
$a_4 = a_3 q = \frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{9}$	$a_4 = a_1 q^3 = 6(\frac{2}{3})^3 = 6\cdot\frac{8}{27} = \frac{16}{9}$	$a_4 = 2^4\cdot 3^{2-4} = 16\cdot 3^{-2} = \frac{16}{9}$
$a_5 = a_4 q = \frac{16}{9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{32}{27}$	$a_5 = a_1 q^4 = 6\cdot(\frac{2}{3})^4 = 6\cdot\frac{16}{81} = \frac{32}{27}$	$a_5 = 2^5\cdot 3^{2-5} = 32\cdot 3^{-3} = \frac{32}{27}$

④ Zjistěte v GP

a) $a_1 = 2,\ q = 5,\ a_3 = ?,\ s_5 = ?$

$a_3 = a_1 q^2 = 2\cdot 5^2 = 50$

$s_5 = a_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1}$

$s_5 = 2\cdot\frac{5^5 - 1}{5 - 1} = \cancel{2}\cdot\frac{5\cdot 625 - 1}{\cancel{4}_2}$

$s_5 = \frac{3125 - 1}{2} = \frac{3124}{2} = 1562$

b) DÚ $a_1 = 6,\ a_2 = 24,\ q = ?,\ a_5 = ?,\ a_8 = ?$

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{24}{6} = 4$

$a_5 = a_1 q^4 = 6\cdot 4^4 = 6\cdot 16\cdot 16 = 1536$

$a_8 = a_1 q^7 = 6\cdot 4^7 = 1536\cdot 4^3 = 98\,304$

⑤ Urči první 2 členy GP: $a_3 = -\sqrt{20}$, $a_4 = 10$

$$q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{10}{-\sqrt{20}} \cdot \frac{-\sqrt{20}}{-\sqrt{20}} = \frac{-10\sqrt{20}}{20} = -\frac{\sqrt{20}}{2} = -\frac{\sqrt{4\cdot 5}}{2} = -\frac{2\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}$$

1\. zp.

$$a_3 = a_1 q^2$$

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{-\sqrt{20}}{(-\sqrt{5})^2} = \frac{-\sqrt{20}}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$a_2 = a_1 q = \frac{-2\sqrt{5}}{5} \cdot (-\sqrt{5}) = +\frac{2\cdot 5}{5} = 2$$

2\. zp.

$$a_3 = a_2 q \Rightarrow a_2 = \frac{a_3}{q}$$

$$a_2 = \frac{-\sqrt{20}}{-\sqrt{5}} = +\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$$

$$a_2 = a_1 q \Rightarrow a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{2}{-\sqrt{5}}$$

$$a_1 = \frac{2}{-\sqrt{5}} \cdot \frac{-\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

⑥ V GP

a) urči s_5, je-li

$$a_1 - a_3 = -1{,}5$$
$$a_1 + a_2 = 1{,}5$$

$$a_1 - a_1 q^2 = -1{,}5$$
$$a_1 + a_1 q = 1{,}5$$

1\. zp.

$$\left.\begin{aligned} a_1 \underbrace{(1-q^2)}_{(1-q)(1+q)} &= -1{,}5 \\ a_1(1+q) &= 1{,}5 \quad (*) \end{aligned}\right\} \odot$$

lze dělit $a \neq 0$, $q+1 \neq 0$, $q \neq -1$, jinak by $a_1(1+q) = 0$

$$1 - q = -1$$
$$\underline{q = 2}$$

$$a_1 = \frac{1{,}5}{1+q} = \frac{1{,}5}{3} = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{32 - 1}{1} = \frac{1}{2} \cdot 31 = \underline{\frac{31}{2}}$$

2\. zp.

z (*) $a_1 = \frac{1{,}5}{1+q}$ dos. do 1. rce

$$\frac{1{,}5}{1+q}(1-q^2) = -1{,}5$$

$$\frac{1{,}5}{\cancel{1+q}}(1-q)\cancel{(1+q)} = -1{,}5$$

$$1{,}5(1-q) = -1{,}5 \quad | : 1{,}5$$

$$1 - q = -1$$
$$\underline{q = 2}$$

b) $a_1 + a_3 = 5$ urči a_1, q, s_7

DÚ

$$a_2 + a_4 = 10$$

$$a_1 + a_1 q^2 = 5$$
$$a_1 q + a_1 q^3 = 10$$

$$\left.\begin{aligned} a_1(1+q^2) &= 5 \\ a_1 q(1+q^2) &= 10 \end{aligned}\right\} ② : ①$$

$$\underline{q = 2}$$

NEBO

$$a_1 = \frac{5}{1+q^2} \quad \text{dos. do 2 rce}$$

$$\frac{5}{\cancel{1+q^2}} \cdot q\cancel{(1+q^2)} = 10$$

$$5q = 10$$
$$q = 2$$

$$\underline{a_1} = \frac{5}{1+4} = \frac{5}{5} = \underline{1}$$

$$s_7 = a_1 \frac{q^7 - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^7 - 1}{2 - 1} = \frac{128 - 1}{1} = \underline{127}$$

c) $a_1 + a_4 = 18$ určit a_1, q
$a_2 + a_3 = 12$

$a_1 + a_1 q^3 = 18$
$a_1 q + a_1 q^2 = 12$

$a_1(1+q^3) = 18$
$a_1 q (1+q) = 12$ } ① : ②

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$1+q^3=(1+q)(1-q+q^2)$

DÚ NEUMÍM-LI VZOREC => => PÍSEMNĚ DĚLIT

$(1+q^3):(1+q)$ upravit

$$(q^3+1):(q+1)=q^2-q+1$$
$$\frac{-(q^3+q^2)}{-q^2+1}$$
$$\frac{-(-q^2-q)}{q+1}$$
$$\frac{-(q+1)}{0}$$

$$\frac{(1+q)(1-q+q^2)}{q(1+q)}=\frac{18}{12}$$

$$\frac{1-q+q^2}{q}=\frac{3}{2} \quad | \cdot 2q$$

$$2q^2-2q+2=3q$$
$$2q^2-5q+2=0$$

$$q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot2}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm3}{4}= \begin{cases} \frac{5+3}{4}=2 \Rightarrow a_1=\frac{18}{1+2^3}=\frac{18}{9}=2 \\ \frac{5-3}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow a_1'=\frac{18}{1+(\frac{1}{2})^3}=\frac{18}{\frac{9}{8}}=\frac{18\cdot8}{9}=16 \end{cases}$$

EXISTUJÍ 2 GP:

GP_1: $a_1=2, q=2$ $\quad$ GP_2: $a_1=16, q=\frac{1}{2}$

⑦ Určit

a) v GP: $q=?$, $a_1=36$, $s_3 \leqq 252$

1. $q\neq1$ $\quad s_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$

$s_3 \leqq 252$

$$36\,\frac{q^3-1}{q-1}\leqq252 \quad |:4$$

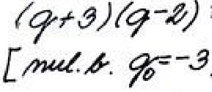
$$9\,\frac{(q-1)(q^2+q+1)}{q-1}\leqq63 \quad |:9$$

$q^2+q+1\leqq7$ ANULOVAT KV. NERCE!

$q^2+q-6\leqq0$ $\quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$(q+3)(q-2)\leqq0$

[nul. b. $q_0=-3, 2$]



NEBO

např. 3 $(3+3)(3-2)>0$

ALE $q\neq1$

$q\in\langle-3,2\rangle-\{1\}$

ZÁVĚR: $q\in\overbrace{\langle-3,2\rangle-\{1\}}^{1.}\cup\overbrace{\{1\}}^{2.}$

$q\in\langle-3,2\rangle$

2. $q=1$

$s_n=na_1$
$s_3=3a_1$
$s_3=3\cdot36=108$
$\leqq252$
pl. => $q=1$ LZE

b) v AP: $a_1=3$, $d=4$, $s_n>250$, $n=?$

DÚ

$s_n>250$

$\frac{n}{2}(a_1+a_n)>250$

$a_n=a_1+(n-1)d$
$a_n=3+(n-1)\cdot4$
$a_n=3+4n-4$
$a_n=4n-1$

$\frac{n}{2}(3+4n-1)>250$

$\frac{n}{2}(2+4n)>250$

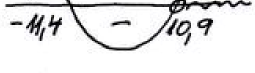
$\frac{n}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}(1+2n)>250$

$n+2n^2>250$ ANULOVAT!

$2n^2-n-250>0$

nul. b. $n_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot2\cdot250}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{2001}}{4}$

$$n_{1,2}=\frac{-1\pm44{,}73}{4}= \begin{cases} \frac{43{,}73}{4}\doteq10{,}9 \\ -\frac{45{,}73}{4}\doteq-11{,}4 \end{cases}$$



ALE V N: $n>11$

ZÁVĚR: alespoň 11 členů AP (dává součet členů >250)

⑧ Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2-10x+16=0$ vložte 4 čísla tak, aby spolu s vypočtenými kořeny vzniklo šest následujících členů
a) AP b) GP

$x^2-10x+16=0$
$(x-8)(x-2)=0$
$x_1=8 \quad x_2=2$

$\underset{a_1}{2} \; . \; . \; . \; . \; \underset{a_6}{8}$ NEBO $\underset{a_1}{8} \; . \; . \; . \; . \; \underset{a_6}{2}$ obráceně

ⓐⓟ (AP)
$a_1=2$
$a_6=a_1+5d$
$8=2+5d$
$5d=6$
$d=\frac{6}{5}=1{,}2$

$(a_1=2)$
$a_2=a_1+d=3{,}2$
$a_3=a_2+d=4{,}4$
$a_4=a_3+d=5{,}6$
$a_5=a_4+d=6{,}8$
($a_6=a_5+d=8$ KONTROLA)

[
$a_1=8$
$a_6=a_1+5d$
$2=8+5d$
$5d=-6$
$d=-\frac{6}{5}$
$d=-1{,}2$

$(a_1=8)$
$a_2=a_1+d=6{,}8$
$a_3=a_2+d=5{,}6$
$a_4=a_3+d=4{,}4$
$a_5=a_4+d=3{,}2$
($a_6=a_5+d=2$ KONTROLA)

pokud chápu posloupnosti => LZE VYVODIT ZPAMĚTI
]

AP1: 2 $\quad$ 3,2 $\quad$ 4,4 $\quad$ 5,6 $\quad$ 6,8 $\quad$ 8

AP2: 8 $\quad$ 6,8 $\quad$ 5,6 $\quad$ 4,4 $\quad$ 3,2 $\quad$ 2

(GP)
$a_1=2$
$a_6=a_1q^5$
$8=2q^5$
$q^5=4$
$q=\sqrt[5]{4}$

$(a_1=2)$
$a_2=a_1q=2\sqrt[5]{4}$
$a_3=a_2q=2\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{4}=2\sqrt[5]{16}$
$a_4=a_3q=2\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{4}=$
$=2\sqrt[5]{2^4\cdot 2^2}=2\sqrt[5]{2^6}=$
$=2\sqrt[5]{2^5\cdot 2^1}=2\cdot 2\sqrt[5]{2}=4\sqrt[5]{2}$
$a_5=4\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{4}=4\sqrt[5]{8}$
$(a_6=4\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}=4\sqrt[5]{32}=4\sqrt[5]{2^5}=8)$.

NEBO $a_1=8,\ a_6=2$ $\quad$ LZE VYVODIT opět zpaměti

[
$a_6=a_1q^5$
$2=8q^5$
$q^5=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$
$q=\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$
$q=\frac{1}{\sqrt[5]{2^2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^3}}$
$q=\frac{\sqrt[5]{2^3}}{2}$

$a_2=8\cdot\frac{\sqrt[5]{2^3}}{2}=4\sqrt[5]{8}$
$a_3=4\sqrt[5]{8}\cdot\frac{\sqrt[5]{2^3}}{2}=$
$=2\sqrt[5]{2^3 2^3}=$
$=2\cdot\sqrt[5]{2^5 2^1}$
$=2\cdot 2\sqrt[5]{2}$
$=4\sqrt[5]{2}$ atd.
složitější
]

GP1: 2 $\quad 2\sqrt[5]{4} \quad 2\sqrt[5]{16} \quad 4\sqrt[5]{2} \quad 4\sqrt[5]{8} \quad$ 8 $\qquad$ GP2: 8 $\quad 4\sqrt[5]{8} \quad 4\sqrt[5]{2} \quad 2\sqrt[5]{16} \quad 2\sqrt[5]{4} \quad$ 2

⑨ Najděte 2 reálná čísla x, y tak, aby čísla $3, x, y$ tvořila 3 následující členy GP a čísla $x, y, 18$ tvořila 3 následující členy AP.

GP: $3 \quad x \quad y$ - následující, ale neznámé kolikáté členy $\} \; q=\frac{x}{3}=\frac{y}{x}$
AP: $x \quad y \quad 18$ - následující $\Rightarrow d=y-x=18-y$
} 2 rce 2 neznámé

$\frac{x}{3}=\frac{y}{x}$
$y-x=18-y$

$x^2=3y$
$2y-x=18 \Rightarrow$ $2y=18+x$, $y=\frac{18+x}{2}$ (*)

$x^2=\frac{3(18+x)}{2}$
$2x^2=3x+54$
$2x^2-3x-54=0$

[nebo lze vyj. x a dosadit, ALE pak nás čeká umocnění.]

$2x^2-3x-54=0$
$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+4\cdot 2\cdot 54}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{441}}{4}=\frac{3\pm 21}{4}$
$x_1=\frac{3+21}{4}=6 \Rightarrow^{(*)} y_1=\frac{6+18}{2}=12$
$x_2=\frac{3-21}{4}=-\frac{18}{4}=-\frac{9}{2} \Rightarrow y_2=\frac{18-\frac{9}{2}}{2}=$
$=\frac{\frac{36-9}{2}}{2}=\frac{\frac{27}{2}}{2}=\frac{27}{4}$

ZÁVĚR: $x_1=6, y_1=2$ NEBO $x_2=-\frac{9}{2}, y_2=\frac{27}{4}$